

Quadratische Gleichungen systematisch lösen

Hinführung, Basis- und Aufbauaufgaben

Methodischer Leitfaden für deinen Erfolg:

1. **Reinquadratische Gleichungen** ($ax^2 + c = 0$) löst du, indem du x^2 isolierst und die Wurzel ziehst (Achtung: Erhalte stets $x = \pm\sqrt{c}$).
2. **Ausklammern / Satz vom Nullprodukt** ($ax^2 + bx = 0$): Klammere die Variable x aus. Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist ($x = 0$ ist immer eine Lösung).
3. **Gemischtquadratische Gleichungen**: Bringe sie zuerst in die Normalform $x^2 + px + q = 0$ und wende dann die **pq-Formel** an.

Sektion 1: Hinführung & Niveau-Doppel (Seite 1)

Löse die folgenden repräsentativen Paare. Links findest du eine **leichte Basisaufgabe** (Level 1) und rechts eine **mittelschwere Aufgabe** (Level 2). Nutze die Linien für deinen strukturierten Rechenweg.

Typ 1: Reinquadratische Gleichungen

A1: Direktes Lösen (Leicht)

$$x^2 - 49 = 0$$

A2: Zusammenfassen & Umformen (Mittel)

$$4x^2 - 100 = 0$$

Typ 2: Satz vom Nullprodukt (Ausklammern)

B1: Einfaches Ausklammern (Leicht)

$$x^2 - 6x = 0$$

B2: Division & Ausklammern (Mittel)

$$3x^2 + 15x = 0$$

Typ 3: pq-Formel / Quadratische Ergänzung

C1: pq-Formel im Standardfall (Leicht)

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

C2: Normalisierung notwendig (Mittel)

$$2x^2 - 10x - 12 = 0$$

Sektion 2: Gemischte Übungsblöcke (Seite 2)

In dieser Sektion findest du drei fokussierte Übungsblöcke. Löse die Aufgaben systematisch und nutze das Gelernte aus den Niveau-Doppeln von Seite 1.

Block A: Rein quadratische Gleichungen

A1

$$5 - 3x^2 = -22$$

Bringe die Gleichung zuerst in die Form $x^2 = c$.

A2

$$16 + 7x^2 = 9x^2$$

Fasse die x^2 -Glieder auf einer Seite zusammen.

A3

$$0,5x^2 - 8 = 0$$

Multipliziere mit 2, bevor du die Wurzel ziehst.

Block B: Gleichungen zum Ausklammern

B1

$$3x^2 - 18x = 0$$

Klammere x oder $3x$ aus.

B2

$$0,2x^2 - 0,6x = 0$$

Achte auf die Dezimalzahlen beim Ausklammern.

B3

$$2x^2 + 16x = 0$$

Wende den Satz vom Nullprodukt konsequent an.

Block C: Anwendung der pq-Formel

C1

$$x^2 - 5x + 10 = 4$$

Bringe die Gleichung auf die Normalform ($= 0$).

C2

$$x^2 + 8x + 17 = 1$$

Überprüfe das Verhalten der Diskriminante.

C3

$$2x^2 - 11x - 2 = 4$$

Teile zuerst durch 2, um p und q abzulesen.

Sektion 3: Diagnose & Fehleranalyse (Seite 3)

Schülerfehler sind wertvolle Lernchancen! Beschreibe präzise, was der jeweilige Schüler falsch gemacht hat, und zeige im Anschluss die mathematisch korrekte Rechnung auf.

Fehleranalyse Leon: Löse die Gleichung $x^2 - 6x + 8 = 0$

Fehlerhafte Schülerrechnung:

$x^2 - 6x + 8 = 0$
 $p = -6; q = 8$
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}$
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 8}$
 $x_{1,2} = -3 \pm 1$
 $x_1 = -2; x_2 = -4$

1. Fehlerbeschreibung (Was wurde falsch gemacht?):

.....

.....

2. Korrekte Rechnung:

.....

.....

Fehleranalyse Sarah: Löse die Gleichung $x^2 = 49$

Fehlerhafte Schülerrechnung:

$x^2 = 49 \mid \sqrt{}$
 $x = \sqrt{49}$
 $x = 7$
 Lösungsmenge $L = \{ 7 \}$

1. Fehlerbeschreibung (Was wurde falsch gemacht?):

.....

.....

2. Korrekte Rechnung:

.....

.....

Fehleranalyse Felix: Löse die Gleichung $x^2 - 5x = 0$

Fehlerhafte Schülerrechnung:

$x^2 - 5x = 0 \mid + 5x$
 $x^2 = 5x \mid : x$
 $x = 5$
 Lösungsmenge $L = \{ 5 \}$

1. Fehlerbeschreibung (Was wurde falsch gemacht?):

.....

.....

2. Korrekte Rechnung:

.....

.....

Musterlösungen (Für die Lehrkraft)

Ausführliche Lösungswege zur Selbstkontrolle

Lösungen zu Sektion 1: Niveau-Doppel (Seite 1)

Typ 1: Reinquadratische Gleichungen

A1 (Leicht): $x^2 - 49 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7, x = -7$.

A2 (Mittel): $4x^2 - 100 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5$.

Typ 2: Satz vom Nullprodukt (Ausklammern)

B1 (Leicht): $x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$.

B2 (Mittel): $3x^2 + 15x = 0 \Rightarrow 3x(x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -5$.

Typ 3: pq-Formel / Quadratische Ergänzung

C1 (Leicht): $x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow p = 6, q = 8$.

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1 \Rightarrow x = -2, x = -4$.

C2 (Mittel): $2x^2 - 10x - 12 = 0 \Rightarrow$ Normalisierung ($\div 2$): $x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow p = -5, q = -6$.

$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - (-6)} = 2,5 \pm \sqrt{6,25 + 6} = 2,5 \pm \sqrt{12,25} = 2,5 \pm 3,5 \Rightarrow x = 6, x = -1$.

Lösungen zu Sektion 2: Gemischte Übungsblöcke (Seite 2)

Block A: Rein quadratische Gleichungen

A1: $5 - 3x^2 = -22 \Rightarrow -3x^2 = -27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, x = -3$.

A2: $16 + 7x^2 = 9x^2 \Rightarrow 16 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2,83$.

A3: $0,5x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 0,5x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4, x = -4$.

Block B: Gleichungen zum Ausklammern

B1: $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$.

B2: $0,2x^2 - 0,6x = 0 \Rightarrow 0,2x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$.

B3: $2x^2 + 16x = 0 \Rightarrow 2x(x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -8$.

Block C: Anwendung der pq-Formel

C1: $x^2 - 5x + 10 = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ (Normalform) $\Rightarrow p = -5, q = 6$.

$x_{1,2} = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6} = 2,5 \pm \sqrt{0,25} = 2,5 \pm 0,5 \Rightarrow x = 3, x = 2$.

C2: $x^2 + 8x + 17 = 1 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 4)^2 = 0$ (Binomische Formel) $\Rightarrow x = -4$ (doppelte Nullstelle).

C3: $2x^2 - 11x - 2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 11x - 6 = 0 \Rightarrow (\div 2) \Rightarrow x^2 - 5,5x - 3 = 0 \Rightarrow p = -5,5, q = -3$.

$x_{1,2} = 2,75 \pm \sqrt{2,75^2 - (-3)} = 2,75 \pm \sqrt{7,5625 + 3} = 2,75 \pm 3,25 \Rightarrow x = 6, x = -0,5$.

Lösungen zu Sektion 3: Fehleranalyse (Seite 3)

Fehleranalyse Leon (Gleichung: $x^2 - 6x + 8 = 0$)

1. Fehlerbeschreibung: Leon hat einen Vorzeichenfehler beim ersten Glied der pq-Formel gemacht. Da der Koeffizient $p = -6$ negativ ist, muss der Term vor der Wurzel positiv sein: $-p/2 = -(-6)/2 = +3$. Leon hat fälschlicherweise -3 geschrieben.

2. Korrekte Rechnung:

$$x_{1,2} = -(-6)/2 \pm \sqrt{((-6)/2)^2 - 8}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1$$

Lösungsmenge: $L = \{ 2; 4 \}$ (bzw. $x_{\blacksquare} = 4$, $x_{\blacksquare} = 2$).

Fehleranalyse Sarah (Gleichung: $x^2 = 49$)

1. Fehlerbeschreibung: Sarah hat beim Ziehen der Quadratwurzel nur die positive Lösung (die Hauptwurzel) berücksichtigt. Jede reinquadratische Gleichung $x^2 = c$ mit $c > 0$ hat jedoch zwei reelle Lösungen: eine positive und eine negative. Sarah hat die Lösung $x = -7$ vergessen.

2. Korrekte Rechnung:

$$x^2 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{49}$$

Lösungsmenge: $L = \{ -7; 7 \}$.

Fehleranalyse Felix (Gleichung: $x^2 - 5x = 0$)

1. Fehlerbeschreibung: Felix hat beide Seiten der Gleichung durch die Variable x geteilt. Die Division durch eine Variable ist mathematisch nicht erlaubt, da x den Wert 0 annehmen kann (Division durch Null ist undefiniert). Durch diese Operation geht die fundamentale Lösung $x = 0$ verloren.

2. Korrekte Rechnung:

$$x^2 - 5x = 0 \quad (x \text{ ausklammern / Satz vom Nullprodukt})$$

$$x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_{\blacksquare} = 0 \text{ oder } x - 5 = 0 \Rightarrow x_{\blacksquare} = 5.$$

Lösungsmenge: $L = \{ 0; 5 \}$.