

Übungsblatt: Nullstellenberechnung

Ganzrationale Funktionen 3. und 4. Grades

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsblatt dient der Festigung der drei zentralen algebraischen Verfahren zur Nullstellenberechnung bei ganzrationalen Funktionen höheren Grades: **Ausklammern**, **Substitution** und **Polynomdivision**. Arbeitet die Aufgaben sorgfältig durch und vergleicht eure Ergebnisse anschließend mit den ausführlichen Lösungswegen auf Seite 2.

TEIL A: ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 1: Ausklammern (Funktion 4. Grades)

Gegeben ist die ganzrationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = x^4 - 9x^2$$

- Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen der Funktion f durch Ausklammern einer geeigneten Potenz von x und unter Verwendung des Satzes vom Nullprodukt.
- Geben Sie die Funktion in ihrer vollständig faktorisierten Form (Linearfaktorzerlegung) an.

Aufgabe 2: Substitution (Funktion 4. Grades)

Gegeben ist die biquadratische Funktion 4. Grades:

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

- Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion mithilfe des Substitutionsverfahrens.
- Stellen Sie die Funktion in der Linearfaktorform dar.

Aufgabe 3: Polynomdivision (Funktion 3. Grades)

Gegeben ist die ganzrationale Funktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 7x + 6$$

- Ermitteln Sie eine erste ganzzahlige Nullstelle x_1 durch systematisches Ausprobieren der Teiler des konstanten Glieds.
- Führen Sie eine Polynomdivision durch, um den Grad der Funktion zu reduzieren.
- Bestimmen Sie alle weiteren reellen Nullstellen der Funktion mithilfe der quadratischen Lösungsformel (pq-Formel) und geben Sie die vollständige Linearfaktorzerlegung an.

TEIL B: AUSFÜHRLICHE LÖSUNGSWEGE

Lösung zu Aufgabe 1: Ausklammern

$$f(x) = x^4 - 9x^2 = 0$$

Schritt 1: Ausklammern der niedrigsten Potenz von x

Da jeder Term der Funktion ein Vielfaches von x^2 enthält (es gibt kein konstantes Glied), klammern wir x^2 aus:

$$x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$$

Schritt 2: Anwendung des Satzes vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

1. Erster Faktor gleich Null setzen:

$$x^2 = 0 \implies \mathbf{x_{1,2} = 0} \quad (\text{doppelte Nullstelle})$$

2. Zweiter Faktor gleich Null setzen:

$$x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9 \implies \mathbf{x_3 = 3} \quad \text{und} \quad \mathbf{x_4 = -3}$$

Die Funktion f hat somit die reellen Nullstellen bei $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 3$ und $x_4 = -3$.

Linearfaktorzerlegung:

Unter Berücksichtigung der doppelten Nullstelle bei 0 lautet die faktorisierte Form:

$$f(x) = x^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$$

Lösung zu Aufgabe 2: Substitution

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Schritt 1: Substitution zur Rückführung auf eine quadratische Gleichung

Wir setzen $z = x^2$. Damit wird $x^4 = (x^2)^2 = z^2$. Dies liefert die quadratische Gleichung:

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

Schritt 2: Lösen der quadratischen Gleichung mit der pq-Formel ($p = -10$, $q = 9$)

$$z_{1,2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9}$$

$$z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4$$

Dies liefert die Lösungen: $z_1 = 9$ und $z_2 = 1$.

Schritt 3: Resubstitution ($x^2 = z$)

Nun führen wir für beide Lösungen die Rücksubstitution durch, um die ursprünglichen x -Werte zu berechnen:

- Für $z_1 = 9$:

$$x^2 = 9 \implies \mathbf{x_1 = 3} \quad \text{und} \quad \mathbf{x_2 = -3}$$

- Für $z_2 = 1$:

$$x^2 = 1 \implies \mathbf{x_3 = 1} \quad \text{und} \quad \mathbf{x_4 = -1}$$

Die Nullstellen liegen somit bei den Punkten $P_{N1}(3|0)$, $P_{N2}(-3|0)$, $P_{N3}(1|0)$, und $P_{N4}(-1|0)$.

Linearfaktorzerlegung:

Da alle vier Nullstellen einfach sind, lautet die Linearfaktorform:

$$f(x) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$

Lösung zu Aufgabe 3: Polynomdivision

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$$

Schritt 1: Erste Nullstelle durch systematisches Probieren finden

Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur die Teiler des konstanten Glieds 6 infrage: $\mathcal{T}(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Wir testen $x = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$$

Damit ist $x_1 = 1$ unsere erste Nullstelle. Der zugehörige Linearfaktor lautet $(x - 1)$.

Schritt 2: Durchführung der Polynomdivision

Wir dividieren das Ausgangspolynom durch den Linearfaktor $(x - 1)$:

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6$$

Die schriftliche Rechnung Schritt für Schritt:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 7x + 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 7x + 6 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -6x + 6 \\ -(-6x + 6) \\ \hline 0 \quad (\text{Rest} = 0) \end{array}$$

Das reduzierte quadratische Restpolynom lautet somit: $x^2 + x - 6$.

Schritt 3: Weitere Nullstellen mit der pq-Formel finden

Wir setzen das Restpolynom gleich null: $x^2 + x - 6 = 0$ mit $p = 1$ und $q = -6$:

$$x_{2,3} = -0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - (-6)}$$

$$x_{2,3} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6} = -0,5 \pm \sqrt{6,25} = -0,5 \pm 2,5$$

- **Zweite Nullstelle (x_2):**

$$x_2 = -0,5 + 2,5 = \mathbf{2}$$

- **Dritte Nullstelle (x_3):**

$$x_3 = -0,5 - 2,5 = \mathbf{-3}$$

Die drei reellen Nullstellen liegen somit bei $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$.

Linearfaktorzerlegung:

Die vollständige Linearfaktorform der Funktion lautet:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$