

Nullstellenberechnung ganzrationaler Funktionen

Ein Leitfaden für Funktionen 3. und 4. Grades mit Beispielen und Lösungen

Einführung: Was ist eine Nullstelle?

Eine **Nullstelle** einer ganzrationalen Funktion f ist ein Wert x_0 , für den der Funktionswert gleich Null ist:

$$f(x_0) = 0$$

Geometrisch betrachtet sind die reellen Nullstellen die x -Koordinaten der Schnitt- oder Berührungspunkte des Funktionsgraphen mit der x -Achse (Abszisse). Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades hat maximal n reelle Nullstellen.

Die drei Kernverfahren im Überblick

Je nach Struktur der Funktionsgleichung kommen unterschiedliche Lösungsverfahren zum Einsatz:

Verfahren	Anwendungsbedingung	Strategie
Ausklammern	Kein absolutes Glied (jeder Summand enthält x)	x mit der kleinsten Potenz ausklammern
Substitution	Biquadratisch (nur Exponenten x^4, x^2 und Konstante)	Ersetzen von $x^2 = z$, quadratische Gleichung
Polynomdivision	Allgemeines Polynom mit absolutem Glied	Eine Nullstelle raten, Linearfaktor abspalten

Methode 1: Ausklammern (Faktorisieren)

Wann anwendbar? Wenn die Funktionsgleichung kein konstantes Glied enthält ($f(0) = 0$). Jeder Summand enthält die Variable x .

Kernprinzip: Wir klammern die kleinste auftretende Potenz von x aus. Nach dem **Satz vom Nullprodukt** ist ein Produkt genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Beispielaufgabe 1 (Grad 4)

Bestimme alle Nullstellen der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 9x^2$$

Lösungsweg:

- Gleichung aufstellen:** $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 9x^2 = 0$.
- Ausklammern:** Da die kleinste Potenz x^2 ist, klammern wir x^2 aus:

$$x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$$

- Satz vom Nullprodukt anwenden:**

- **Faktor 1:** $x^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$ (Dies ist eine *doppelte Nullstelle*, der Graph berührt hier die x -Achse).
 - **Faktor 2:** $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{x_{2/3} = \pm 3}$ (Dies sind zwei *einfache Nullstellen*, der Graph schneidet die x -Achse).
4. **Ergebnis:** Die Nullstellen liegen bei $\mathbf{x_1 = 0}$, $\mathbf{x_2 = 3}$ und $\mathbf{x_3 = -3}$.
Die Darstellung in Linearfaktoren lautet: $f(x) = x^2(x - 3)(x + 3)$.

Methode 2: Substitution (Ersetzung)

Wann anwendbar? Bei biquadratischen Gleichungen der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (nur gerade Exponenten und ein absolutes Glied).

Kernprinzip: Durch Ersetzung von $x^2 = z$ (und $x^4 = z^2$) führen wir die Gleichung 4. Grades auf eine quadratische Gleichung zurück, die wir mit der pq-Formel lösen können. Anschließend müssen die Werte rückübersetzt (resubstituiert) werden.

Beispielaufgabe 2 (Grad 4)

Bestimme alle Nullstellen der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Lösungsweg:

1. **Gleichung aufstellen:** $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
2. **Substitution durchführen:** Wir setzen $z = x^2$. Dadurch erhalten wir die quadratische Hilfsgleichung:

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

3. **pq-Formel anwenden:** Mit $p = -10$ und $q = 9$:

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9} \\ z_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{25 - 9} \\ z_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen für z : $\mathbf{z_1 = 9}$ und $\mathbf{z_2 = 1}$.

4. **Resubstitution ($z = x^2$):**

- **Fall 1 ($z_1 = 9$):** $x^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{x_{1/2} = \pm 3}$
- **Fall 2 ($z_2 = 1$):** $x^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{x_{3/4} = \pm 1}$

5. **Ergebnis:** Die Funktion besitzt vier einfache Nullstellen bei $\mathbf{x_1 = 3}$, $\mathbf{x_2 = -3}$, $\mathbf{x_3 = 1}$ und $\mathbf{x_4 = -1}$.

Linearfaktorform: $f(x) = (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$.

Methode 3: Polynomdivision

Wann anwendbar? Bei Funktionen höheren Grades mit einem absoluten Glied, die nicht durch Substitution gelöst werden können.

Kernprinzip: Wir erraten eine erste Nullstelle x_1 (systematisch über die Teiler des absoluten Glieds). Dann teilen wir das Polynom durch den Linearfaktor $(x - x_1)$. Das verbleibende Restpolynom hat einen um 1 geringeren Grad.

Beispielaufgabe 3 (Grad 3)

Bestimme alle Nullstellen der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = x^3 - 7x + 6$$

Lösungsweg:

1. **Gleichung aufstellen:** $x^3 - 7x + 6 = 0$.

2. **Erste Nullstelle durch Ausprobieren finden:** Die ganzzahligen Teiler von 6 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Wir prüfen $x = 1$:

$$f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 1}$$

Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, lautet der dazugehörige Linearfaktor $(\mathbf{x - 1})$.

3. **Polynomdivision durchführen:** Wir teilen das Ausgangspolynom durch $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 7x + 6) : (x - 1) = \mathbf{x^2 + x - 6} \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 7x + 6 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -6x + 6 \\ -(-6x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Das Restpolynom ist somit quadratisch: $x^2 + x - 6 = 0$.

4. **Restliche Nullstellen mit der pq-Formel bestimmen:** Mit $p = 1$ und $q = -6$:

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= -0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - (-6)} \\ x_{2/3} &= -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6} \\ x_{2/3} &= -0,5 \pm \sqrt{6,25} = -0,5 \pm 2,5 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich: $\mathbf{x_2 = 2}$ und $\mathbf{x_3 = -3}$.

5. **Ergebnis:** Die Nullstellen liegen bei $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = 2}$ und $\mathbf{x_3 = -3}$.
Linearfaktorform: $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.